Hodge star の入口

1　導入

このページの核心は、Hodge star を内積と向き付けに依存して、形式を補次元の形式へ対応させる操作として導入することである。

2　用語と定義

Hodge star は、n 次元の内積空間で、k 形式を $n-k$ 形式へ送る線形写像である。

3　方針

Hodge star は、微分形式の言語をベクトル解析の grad・curl・div と接続する。外微分だけでは次元が 1 つ上がるが、Hodge star を組み合わせると補次元の量へ移行できる。

4　代表例

$\mathbb{R}^3$ の標準内積と標準向きで、

$$*dx = dy \wedge dz$$

である。これは x 方向と垂直な面要素へ対応する。

5　計算表

$\mathbb{R}^2$ の標準内積と標準向きでは、

$$*1 = dx \wedge dy, \qquad *dx = dy, \qquad *dy = -dx, \qquad *(dx \wedge dy) = 1$$

である。$\mathbb{R}^3$ では、$*dx = dy \wedge dz$、$*(dx \wedge dy) = dz$ のように補次元の形式へ対応する。

$\mathbb{R}^3$ の標準の計算表は次の通りである。

形式	Hodge star
1	$dx \wedge dy \wedge dz$
dx	$dy \wedge dz$
dy	$dz \wedge dx$
dz	$dx \wedge dy$
$dx \wedge dy$	dz
$dy \wedge dz$	dx
$dz \wedge dx$	dy
$dx \wedge dy \wedge dz$	1

6 計量が必要な理由

Hodge star は垂直や長さの情報を使用する。そのため内積なしには定義できない。また向き付けを反転すると、体積形式の符号が変化し、Hodge star の符号も影響を受ける。

例として、dx に対応する補次元の面は y, z 方向の面である。ただし「垂直」や「単位面積」を判断するには内積が必要である。向きを反転すると体積形式が $-dx \wedge dy \wedge dz$ になるため、Hodge star の符号も変化する。

7 grad・curl・div との関係

3 次元では、外微分 d と Hodge star $*$ を組み合わせることで、gradient、curl、divergence の対応を記述できる。たとえば divergence は、1 形式に対応する場へ $*d*$ を作用させる構造として理解できる。

ベクトル場 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ に対応する 1 形式を $\alpha = P dx + Q dy + R dz$ とする。このとき $d\alpha$ は curl に対応し、$*d\alpha$ は curl を 1 形式として戻す。また

$$d(*\alpha) = (P_x + Q_y + R_z)\, dx \wedge dy \wedge dz$$

であり、$*d(*\alpha) = P_x + Q_y + R_z$ が divergence に対応する。

8 反例または限界

外微分 d は座標変換と自然に両立するが、Hodge star は計量を変更すると変化する。同じ形式であっても、Euclidean 計量と曲がった計量では Hodge star の結果が一致しない。形式の代数だけではなく、幾何の情報を使用する操作である。

9 どこまで成り立つか

Hodge star は内積と向き付けを必要とする。外微分とは異なり、純粋に位相的な操作ではない。

10 関連リンク

→ 講義 一般 Stokes 定理とベクトル解析辞書 lecture math exterior-algebra
https://study.bem130.com/lecture/math/exterior-algebra/一般 Stokes 定理とベクトル解析辞書-講義/